9/12/2015

**Άσκηση** Ένα σώμα εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης. Σε 1 sec βρίσκεται στο μέγιστο ύψος 5m και σε 2 sec επιστρέφει στη Γη. Δίνεται ότι το ύψος κατά την ελεύθερη βολή δίνεται ~~...~~ είναι συνάρτηση 2ου βαθμού πολ/μο ως προς τον χρόνο. Να βρεθεί το πολυώνυμο αυτό χρησιμοποιώντας παρεμβολή.
($U_{εκτ} = U_0 t - \frac{1}{2} g t^2$)

**Λύση** Για να βρούμε πολ/μο παρεμβολής n βαθμού θέλουμε n+1 σημεία. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι $f(0)=0$ (αφού την χρ. στιγμή 0 είναι στην επιφάνεια της Γης), $f(1)=5$, $f(2)=0$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | 0 | 5 | 0 |

Συμφέρει να πάρουμε τον τύπο του Lagrange

$$p(x) = \cancelto{0}{f(t_0)} L_0(t) + f(t_1)L_1(t) + \cancelto{0}{f(t_2)} L_2(t) = 5L_1(t) = 5\frac{(t-0)(t-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{5\cdot t(t-2)}{-1}$$
$$= \frac{5t^2-10t}{-1} = 10t - 5t^2$$

**Άσκηση** Να βρεθεί η συνάρτηση f, όταν είναι γνωστό ότι είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα (1) και δίνεται από τον πίνακα τιμών

| $x_i$ | $\overset{x_0}{0}$ | $\overset{x_1}{1}$ | $\overset{x_2}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | 1 | -1 | 3 |

Πίνακας Διαιρεμένων Διαφορών

| $x_i$ | n=0 | n=1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 1 | -1 | -2 | | |
| (f)= 2 | 3 | 4 | 3 | |
| | | | | 1 |

Χωρίς να γνωρίζουμε το 4ο σημείο γνωρίζουμε ότι $\Delta^3(x_0,1,2,x_3) = 1$ ως συντελεστής μεγιστοβαθμίου όρου του πολ/μου παρεμβολής 3ου βαθμού. Ο τύπος του Newton δίνει:

$$f(x) = p(x) = \Delta^0_{(0)}(f)(x-0) + \Delta^1(0,1)(f)(x-0)(x-1) + \Delta^3(0,1,2,x_3)(f)(x-0)(x-1)(x-2) = 1-2x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2) = 1-2x+\cancel{3x^2}-3x+x^3-\cancel{3x^2}+2x =$$
$$= x^3-3x+1$$

2ος τρόπος: βρίσκουμε πολ/μο παρεμβολής το πολύ 2ου βαθμού

$p_2(x) = \Delta^0(0)(f) + \Delta^1(0,1)(f)(x-0) + \Delta^2(0,1,2)(x-0)(x-1) = 1-2x+3x(x-1) =$

$= 1-2x+3x^2-3x = 3x^2-5x+1$

$f(x) = p_2(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-0)(x-1)(x-2) = p_2(x) + \frac{(\xi^3+9\xi^2)^{(3)}}{3!}(x-0)(x-1)(x-2) =$

$3x^2-5x+1+x(x-1)(x-2) = x^3-3x+1$

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα $S(n) = 1^2+2^2+\dots+n^2$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού ως προς n. Να βρεθεί το πολυώνυμο χρησιμοποιώντας παρεμβολή

$$\boxed{S(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

Η διαιρεμένη διαφορά 1ης τάξης θα είναι

$$\Delta^1(n-1,n)(S) = \frac{S(n)-S(n-1)}{n-(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = n^2$$

Παρατηρούμε ότι οι διαιρ. διαφ. 1ης τάξης είναι πολ/μο 2ου βαθμού ως προς n. Θεωρώντας αυτή την διαιρ διαφ. ως συνάρτηση, οι διαιρεμένες διαφορές 3ης τάξης θα είναι 0, επομένως οι διαιρ διαφ 4ης τάξης της S θα είναι 0, Επομένως, οι διαιρ διαφ. 4ης τάξης της S θα είναι 0 που σημαίνει ότι η S είναι πολ/μο 3ου βαθμού

$f(n) = \Delta^1(n-1,n)(S) = n^2$

$\Delta^2(n-2,n-1,n)(S) = \frac{\Delta^1(n-1,n)(S) - \Delta^1(n-2,n-1)(S)}{n-(n-2)} = \frac{n^2-(n-1)^2}{2}$

$= \frac{2n+1}{2} = n+\frac{1}{2}$ πολ. 1ου βαθμού

$\Delta^3(n-3,n-2,n-1,n)(S) = \frac{\Delta^2(n-2,n-1,n)(S) - \Delta^2(n-3,n-2,n-1)(S)}{n-(n-3)} = \frac{2n+1-(2(n-1)+1)}{6} = \frac{1}{3}$

$\Delta^4(n-4,n-3,n-2,n-1,n)(S) = \frac{\Delta^3(n-3,n-2,n-1,n)(S) - \Delta^3(n-4,n-3,n-2,n-1)(S)}{4} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{4}$

$=0$

| $n_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | |
| 1 | 1 | 1 | | |
| 2 | 5 | 4 | 3/2 | |
| 3 | 14 | 9 | 5/2 | 1/3 |

$f(n) = p(n) = 0 + 1(n-0) + \frac{3}{2}(n-0)(n-1) + \frac{1}{3}(n-0)(n-1)(n-2) =$

$= n + \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{3}n^3 - n^2 + \frac{2}{3}n$

$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{6}$

"ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ"

Πρόβλημα Έστω $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$. Αν $F$ είναι η παράγουσα συνάρτηση τότε $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Όμως στην πράξη, στα περισσότερα προβλήματα δεν γνωρίζουμε την $F$ (παράγουσα) ή σε πολλά προβλήματα είναι τόσο πολύπλοκη που δημιουργεί υπολογιστικά προβλήματα.

Στόχος της αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι να προσεγγιστεί το ολοκλήρωμα γνωρίζοντας την έκφραση του στρατηγματος.

Για την προσέγγιση του $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ παίρνουμε την προσέγγιση $Q_{n+1}$ τ.ω. $Q_{n+1} = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$, όπου $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, $x_i$ διαφ. μεταξύ τους τα βάρη $w_i$ είναι πραγματικοί αριθμοί και υπολογίζονται κατάλληλα ώστε να είναι όσο ~~...~~ πιο ακριβής ο τύπος.

Υπολογίζονται τα $w_i$ ολοκληρώνοντας το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$.

$$I(p) = Q_{n+1}(f) = Q_{n+1}(p)$$